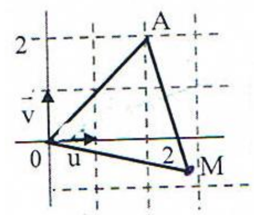
Série N°:2

(Nombres Complexes)

EXERCICE N°1 :



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.
Le triangle OAM est équilatéral. A est le point d'affixe 2 + 2i et M d'affixe z.
Déterminer $|z|$ et arg(z).

EXERCICE N°2 :

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : 2 , $1-e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) Montrer que pour tout réel θ on a : $1+e^{i\theta}=2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1-e^{i\theta}=-2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

3) Calculer z_B/z_C en déduire que $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$

4) Montrer que OBAC est un losange.

5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $(1+e^{i\theta})$ lorsque θ varie dans $]0,\pi[$.

EXERCICE N°3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A(-i) et B(-2i).
A tout point M d'affixe $z\neq -i$, on associe le point M' d'affixe z' = $\frac{z+2i}{1-iz}$

1/ Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels z' soit réel.

2/ a- Vérifier pour tout $z\neq -i$, on a : $-iz' = \frac{z+2i}{z+i}$

b- Montrer que $|z'|=\frac{BM}{AM}$, en déduire l'ensemble des points M lorsque $|z'|=1$

3/ Soit le nombre complexe W = $\frac{z'-i}{z-i}$ avec $z\in C/\{-i,i\}$

a- Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $(z-i)(1-iz) = -i(z^2+1)$

b- En déduire que W = $\frac{-1}{z^2+1}$

4/ On pose z = $e^{i\frac{\theta}{2}}$ avec $\theta\in[0,\pi[$

a- Ecrire z^2+1 sous forme exponentielle.

b- En déduire la forme exponentielle de w.

c- Déterminer θ pour que $|w|=1$.

EXERCICE N°4 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.
On donne les points A, B et C d'affixes : 2i, $\sqrt{3}-i$ et $2ie^{i\theta};\theta\in]0,2\pi[$.

1/ Dans cette question on pose $\theta = 2\pi/3$.

a- Placer dans le plan complexe les points A, B et C.

b- Vérifier que $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, en déduire la nature exacte du triangle ABC.

2/ a- Vérifier que $e^{i\theta}-1=2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b- En déduire que $z_A-z_C = 4\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$

c- Déterminer θ pour que le triangle ABC soit isocèle en A?